

Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE 2 MIA SHS

Espaces euclidiens

Examen terminal, le 8 décembre 2025, 8h00–10h00

Documents et calculatrices sont interdits.

Exercice 1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a. Dire pourquoi A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ sans faire de calcul.
- b. Montrer que le polynôme caractéristique $\det(A - XI)$ de A est égal à $-X^3 + 9X^2 + 9X - 81$.
- c. Déterminer les valeurs propres de A , en sachant que 3 est une racine du polynôme caractéristique.
- d. Donner une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
- e. Vérifier qu'il existe une matrice orthogonale Q telle que $Q^{-1}AQ$ soit diagonale.

Exercice 2. Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie par

$$Q(x, y, z, t) = x^2 - 4xy + 2xz + 2xt + 4y^2 + z^2 + t^2 + 6zt$$

Soit A la matrice de la forme bilinéaire symétrique Φ associée à Q .

- a. Donner A .
- b. Diagonaliser Q par la méthode de Gauss.
- c. Quelle est la signature de Q ?
- d. Déterminer une matrice 4×4 inversible P telle que tPAP soit diagonale avec tous les coefficients diagonaux égaux à ± 1 .
- e. Vérifier en effectuant le calcul que tPAP est bien une matrice diagonale avec tous les coefficients diagonaux égaux à ± 1 .

Barème indicatif sur 20 points :

Exercice 1	10 pts
Exercice 2	10 pts